

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

MAT478 ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİ ARA SINAVI (25.04.2022)

Soru 1: $\vec{x}, \vec{y} \in IL^2$ future-pointing ve time-like vektörler olsun. Bu durumda;

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \geq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, (\text{Lorentz Uzayında Üçgen Eşitsizliği}),$$

ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

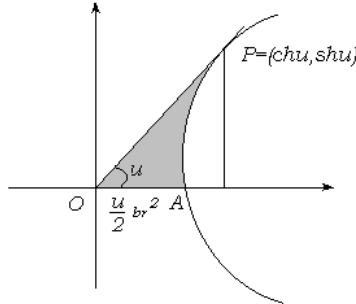
Soru 2: IL^2 de $A(u)$ dönme matrisine karşılık gelen

$$A: IL^2 \rightarrow IL^2$$

lineer dönüşümünün iki nokta arasındaki uzaklığı koruduğunu gösteriniz.

Soru 3: Bir parametrelili düzlemsel bir L/L' Lorentz hareketinde L düzleminin (P) hareketli pol eğrisi L' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlandığını gösteriniz.

Soru 4: $x^2 - y^2 = 1$ Lorentz çemberi üzerindeki P noktasının koordinatları için kullanılan



hiperbolik radyan açı u olmak üzere taralı bölgenin alanının $\frac{u}{2}br^2$ olduğunu gösteriniz.

Soru 5: $A(\ln u)$ matrisi yardımı ile $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$ birbirine dik olan iki vektörün $u = \ln 4$ kadar dönmeden sonra alacağı yeni konumlarını bulunuz ve dönmeden sonraki yorumu yapınız.

NOT: Süre 90 dakikadır.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

CEVAP 1)

$$(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

Schwartz E.

$$\geq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle = -(\langle x + y, x + y \rangle = \|x + y\|^2)$$

$$\Rightarrow (\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x + y\|^2$$

$$\Rightarrow \|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| \text{ dir.}$$

CEVAP 2) $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{L}^2$ de iki nokta olsun.

$$\overrightarrow{xy} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$$

olur.

$$d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = |(y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2|^{1/2}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\overrightarrow{\mathcal{A}(u)x} = (x_1 chu + x_2 shu, x_1 shu + x_2 chu),$$

$$\overrightarrow{\mathcal{A}(u)y} = (y_1 chu + y_2 shu, y_1 shu + y_2 chu)$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} d(\overrightarrow{\mathcal{A}(u)x}, \overrightarrow{\mathcal{A}(u)y}) &= \|\overrightarrow{\mathcal{A}(u)x} - \overrightarrow{\mathcal{A}(u)y}\| \\ &= \|((y_1 - x_1)chu + (y_2 - x_2)shu), ((y_1 - x_1)shu + (y_2 - x_2)chu)\| \\ &= |(y_1 - x_1)^2 ch^2 u + (y_2 - x_2)^2 sh^2 u + 2(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)shchu \\ &\quad - (y_1 - x_1)^2 sh^2 u - (y_2 - x_2)^2 ch^2 u - 2(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)shchu|^{1/2} \\ &= \left| (y_1 - x_1)^2 \frac{(ch^2 u - sh^2 u)}{1} - (y_2 - x_2)^2 \frac{(ch^2 u - sh^2 u)}{1} \right|^{1/2} \\ &= |(y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2|^{1/2} \\ &= \|\overrightarrow{xy}\| \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

dir.

CEVAP 3) Her t anında hareketli (P) pol eğrisi ve sabit (P') pol eğrisi birbirlerine teğet olduklarını biliyoruz. (P) nin t_0, t_1 e karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{V}_r\| dt \Rightarrow ds = \|\vec{V}_r\| dt \quad (*)$$

dir.

(P') nin t_0, t_1 e karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu,

$$s' = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{V}_a\| dt \Rightarrow ds' = \|\vec{V}_a\| dt \quad (**)$$

olur. Pol eğrileri elde edilirken $\vec{V}_f = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda, $\vec{V}_a = \vec{V}_r$

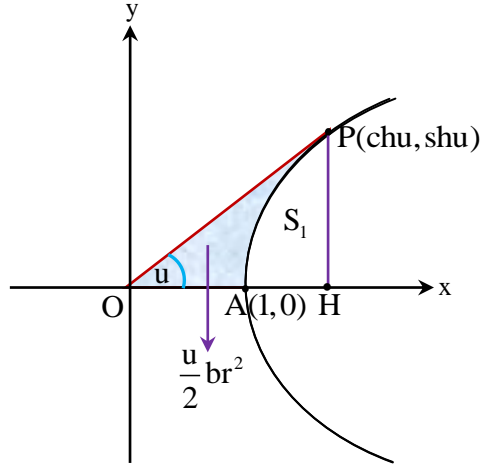
olacağından $\|\vec{V}_a\| = \|\vec{V}_r\|$ dır. (*)ve (**) dan

$$ds = ds'$$

elde edilir. Bu ise L düzleminin (P) hareketli pol eğrisinin L' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanması demektir.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAP 4)



Toplam alanımız A olsun. Toplam alan üçgenin alanı olup;

$$A = \frac{|OH||PH|}{2} = \frac{1}{2} chu.shu \text{ olur.}$$

Şimdi S_1 in alanını bulalım:

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = x^2 - 1 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1} \text{ dir.}$$

$$S_1 = \int_1^{chu} y dx = \int_1^{chu} \sqrt{x^2 - 1} dx = \left(\frac{1}{2} x \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| \right) \Big|_1^{chu}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} chu \cdot \sqrt{\frac{ch^2u - 1}{sh^2u}} - \frac{1}{2} \ln \left| chu + \sqrt{\frac{ch^2u - 1}{sh^2u}} \right| - 0$$

$$S_1 = \frac{1}{2} chu.shu - \frac{1}{2} \ln |chu + shu| \dots \dots \dots (*)$$

$shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ ve $chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ olduğundan $chu + shu = \frac{e^u - e^{-u} + e^u + e^{-u}}{2} = e^u$ elde edilir.

Bu değer (*) ifadesinde yerine yazılırsa

$$S_1 = \frac{1}{2} chu.shu - \frac{1}{2} \ln |e^u| = \frac{1}{2} chu.shu - \frac{1}{2} u \text{ bulunur. Buna göre, istenen alan}$$

$$S = A - S_1 = \frac{1}{2} chu.shu - \frac{1}{2} chu.shu + \frac{1}{2} u$$

$$S = \frac{1}{2} u br^2 \text{ dir.}$$

CEVAP 5)

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle (1,0), (0,1) \rangle = 0,$$

$$\|\vec{e}_1\| = \sqrt{|\langle (1,0), (1,0) \rangle|} = 1,$$

$$\|\vec{e}_2\| = \sqrt{|\langle (0,1), (0,1) \rangle|} = 1$$

dir.

$$u = \ln 4 \Rightarrow chu = \frac{1}{2}(e^{\ln 4} + e^{-\ln 4}) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{4}\right) = \frac{17}{8},$$

$$sh(\ln 4) = \frac{1}{2}(e^{\ln 4} - e^{-\ln 4}) = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{15}{8} \text{ den}$$

$$\mathcal{A}(\ln 4) = \begin{bmatrix} ch(\ln 4) & sh(\ln 4) \\ sh(\ln 4) & ch(\ln 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/8 & 15/8 \\ 15/8 & 17/8 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

$$(\mathcal{A}(\ln 4))\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 17/8 & 15/8 \\ 15/8 & 17/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/8 \\ 15/8 \end{bmatrix}$$

ve

$$(\mathcal{A}(\ln 4))\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 17/8 & 15/8 \\ 15/8 & 17/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/8 \\ 17/8 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Lorentz anlamında $u = \ln 4$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $(\mathcal{A}(\ln 4))\vec{e}_1$ ve $(\mathcal{A}(\ln 4))\vec{e}_2$ vektörleri için

$$\langle (\mathcal{A}(\ln 4))\vec{e}_1, (\mathcal{A}(\ln 4))\vec{e}_2 \rangle = 0,$$

$$\|(\mathcal{A}(\ln 4))\vec{e}_1\| = \sqrt{\frac{289 - 225}{64}} = 1,$$

$$\|(\mathcal{A}(\ln 4))\vec{e}_2\| = \sqrt{\left|\frac{225 - 289}{64}\right|} = 1$$

dir. Buna göre; $u = \ln 4$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $(\mathcal{A}(\ln 4))\vec{e}_1$ ve $(\mathcal{A}(\ln 4))\vec{e}_2$ vektörleri birbirlerine yine diktir ve her bir vektörün boyu korunmuş olur.